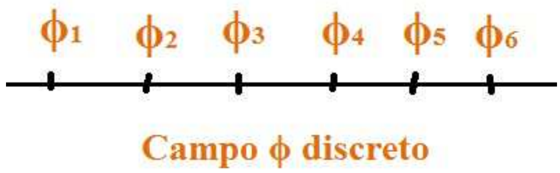
V-6 (28 min) 23-Febrero-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Campo discreto en una línea**

Supongamos el eje X y que existe un valor del campo ϕ_i en puntos x_i discretos de esa línea.

En principio podemos suponer un número "n" finito de puntos. Posteriormente podremos hacer que $n \to \infty$



En ese campo definimos la **ACCIÓN** como una función de todos los valores ϕ_i con productos $A_{ij}\phi_i\,\phi_j$:

$$S(\phi_i) = \sum \frac{m^2}{2} A_{ij}\phi_i\phi_j = \frac{m^2}{2}(A_{11}\phi_1^2 + A_{12}\phi_1\phi_2 + A_{21}\phi_2\phi_1 + \cdots + A_{32}\phi_3\phi_2 + \cdots + A_{nn}\phi_n^2)$$

Podemos considerar los valores ϕ_i como matriz columna $(\boldsymbol{\phi})$ y su traspuesta matriz fila $(\boldsymbol{\phi})^{\mathbf{T}}$ y poner la expresión de $S(\phi_i)$ como producto de matrices:

$$\boldsymbol{S(\phi_i) = \frac{m^2}{2} \cdot (\phi)^T \cdot (A) \cdot (\phi)} \qquad \textbf{(I)}$$

Suponemos simetría en comunicación entre valores ϕ_i y ϕ_j , $\to$ coeficientes $\boldsymbol{A_{ij} = A_{ji}}$ $\to$ **Matriz (A) simétrica**

Vimos en un teorema del resumen del V-2 que, al ser (A) simétrica, se puede encontrar conjunto de valores propios $\boldsymbol{\lambda_i}$ y vectores propios $\boldsymbol{\vec{v}_i}$ normalizados y ortogonales, tales que, poniendo cada vector (sus componentes) en forma de matriz columna, cumplen: $\boldsymbol{(A) \cdot (\vec{v}_i) = \lambda_i \cdot (\vec{v}_i)}$.
Además en resumen del V-2 vimos que:

- Se forma matriz **(V)** ortogonal, con columnas los vectores propios, y cumple que ***det*** **(V) = +1**
- Se forma matriz diagonal **(D)** con los valores propios $\boldsymbol{\lambda_i}$ y cumple ***det*** **(D) =** ***det*** **(A)** (IV) del resumen de V-2
- Se cumple: **(D) = (V)$^{\mathbf{T}}$·(A)· (V)** (II) del resumen de V-2

Vamos a comprobar, tal como se vio también en el video 2, que en la expresión de la **ACCIÓN** podemos hacer un cambio de variables, utilizando la matriz (V) de los vectores propios, de forma que, expresada con las nuevas variables, será una suma de términos cuadráticos con coeficientes los valores propios:

Cambio $\phi_i \to \Psi_i$ (base canónica a propia): $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{abreviado}} \boldsymbol{(\phi) = (V) \cdot (\psi)}$

Sustituimos en (I): $S(\phi_i) = \frac{m^2}{2} \cdot [(V)(\psi)]^T\,(A)\,\,[(V)(\psi)]$

Propiedad de matrices: $[(V)(\psi)]^T = (\psi)^T (V)^T$

$$S(\phi_i) = \frac{m^2}{2} \cdot (\psi)^T \cdot (V)^T \cdot (A) \cdot (V) \cdot (\psi)$$

Como $(D) = (V)^T \cdot (A) \cdot (V)$ queda: $S(\phi_i) = \frac{m^2}{2} \cdot (\psi)^T (D)(\psi) = \frac{m^2}{2}\,(\psi_1 \dots \psi_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$

Desarrollando el producto de matrices, queda la **ACCIÓN** como suma de términos cuadráticos con coeficientes los valores propios:

$$\boldsymbol{S(\psi_i) = \frac{m^2}{2} \cdot (\psi)^T (D)(\psi)}$$

$$\boldsymbol{S(\psi_i) = \frac{m^2}{2}\left(\lambda_1\psi_1^2 + \lambda_2\psi_2^2 + \lambda_3\psi_3^2 + \;\dots + \lambda_n\psi_n^2\,\right)} \qquad \textbf{(II)}$$

Tal como ya se había adelantado en el video 2.
Veremos a continuación que esta expresión de la **ACCIÓN** resulta ventajosa para el cálculo de integrales

Cálculo de integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-S(\phi_i)}\ d\phi_1 d\phi_2 \dots d\phi_n$

Vimos en el video 3 que para hacer en la integral un cambio de variables $\phi_i \to \Psi_i$, hay que introducir el jacobiano, que en este caso es:

$$|J| = \frac{\partial\,(\phi_1 \dots . \phi_n)}{\partial(\psi_1 \dots \psi_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \psi_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial \psi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial \psi_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial \psi_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} = \det\,(V) = +\mathbf{1}$$

Sabiendo que el Jacobiano vale la unidad y utilizando la expresión **(II)**, hacemos el cambio de variables y queda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\phi_i})}\, d\phi_1 d\phi_2 \dots d\phi_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{e}^{-\frac{m^2}{2}(\lambda_1\psi_1^2+\lambda_2\psi_2^2+\lambda_3\psi_3^2+\ \dots+\lambda_n\psi_n^2)}\, d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_n$$

Ahora se puede descomponer en producto de integrales gaussianas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m^2}{2}\lambda_1\psi_1^2}\, d\psi_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m^2}{2}\lambda_2\psi_2^2}\, d\psi_2 \ \dots.. \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m^2}{2}\lambda_n\psi_n^2}\, d\psi_n$$

El resultado de esas integrales en (I) del resumen de V-3:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{m^2\lambda_1}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{m^2\lambda_2}} \cdot \dots \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{m^2\lambda_n}} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{m}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\,\lambda_2 \cdots \lambda_n}} = \left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{2\pi}}}{\boldsymbol{m}}\right)^{\boldsymbol{n}} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{det}(\boldsymbol{D})}}$$

Como sabemos que ***det*** **(D) =** ***det*** **(A)**, podemos concluir que el valor de la integral es:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\phi_i})}\ \mathcal{D}\phi = \left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{2\pi}}}{\boldsymbol{m}}\right)^{\boldsymbol{n}} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})}}} \qquad \textbf{(III)}$$

En vez de poner producto de diferenciales $d\phi_1 \cdot d\phi_2 \dots . d\phi_n$ se abrevia, poniendo $\mathcal{D}\phi$

Este resultado será útil para hallar valores esperados de, por ejemplo: $\langle\phi_3^2\rangle$, $\langle\phi_2\phi_5\rangle$, $\langle\phi_7\phi_5\phi_2\rangle$ etc.